數學傳播 44卷2期, pp. 84-89

冪函數不等式的性質及其應用

王鳳春

摘要: Bernoulli 不等式, Young 不等式均是冪函數不等式的特例, 冪函數不等式在求非齊次、非輪換對稱式多元函數的極值中非常有效, 同時在不等式證明和級數斂散性的證明中均有著廣泛的應用。

關鍵字: 冪函數不等式, 多元函數, 極值, Bernoulli 不等式, Young 不等式。

求多元函數的極值是數學中的常見問題, 但是, 常用的方法往往用於求齊次的輪換對稱式多元函數的極值, 冪函數不等式, 在求當條件或目標多元函數爲非齊次的、非輪換對稱式的極值時非常有效。同時, Bernoulli 不等式, Young 不等式均是冪函數不等式的特例, 在不等式證明和級數斂散性的證明中冪函數不等式有著廣泛的應用。

一、發現定理

1、**定義**：過曲線 (面) 上一點 P 且全在曲線 (面) 一邊 (上邊或下邊) 的線 (面) 叫曲線 (面) 的支撐線 (面)，P 叫支撐點 [1]。如圖 1。

2、**定理**：設 $0<\alpha<\beta$, $t>0$, $x>0$ 則 $x^\alpha\le px^\beta+q$,

當且僅當 $x=t$ 時等號成立, 其中 $p=\dfrac{\alpha}{\beta}t^{\alpha-\beta}$, $q=t^\alpha\Big(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)$。$(M1)$

其等價形式爲 $\dfrac{1}{\alpha}\Big(\dfrac{x^\alpha}{t^\alpha}-1\Big)\le\dfrac{1}{\beta}\Big(\dfrac{x^\beta}{t^\beta}-1\Big)$。[2]

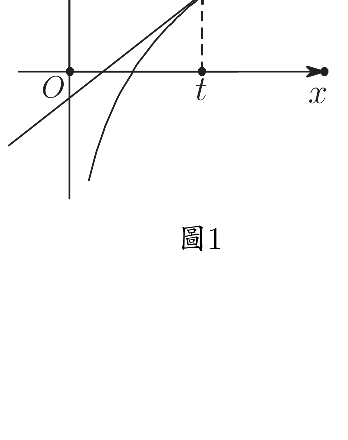

圖1

證明：令 $f(x)=px^\beta-x^\alpha+q$,

則 $f'(x)=p\beta x^{\beta-1}-\alpha x^{\alpha-1}$,

令 $f'(t)=p\beta t^{\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}=0$,

得 $p=\dfrac{\alpha}{\beta}t^{\alpha-\beta}$,

再令 $f(t)=pt^\beta-t^\alpha+q=0$,

得 $q=\Big(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\Big)t^{\alpha}$。

當 $x>t$ 時, $f'(x)=\alpha t^{\alpha-\beta}x^{\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}>\alpha t^{\alpha-\beta}t^{\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}=0$,

所以 $f(x)$ 是增函數。

同理, 當 $x<t$ 時, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 是減函數,

由 $f'(t)=0$, 即 $f(x)$ 的最小值爲 0, 所以定理成立。

把 $(M1)$ 叫冪函數不等式, $g(x)=px^{\beta}+q$ 是 $F(x)=x^{\alpha}$ 的支撐函數, 或 $F(x)$ 是 $g(x)$ 的支撐函數, $P(t,t^{\alpha})$ 是支撐點。

二、冪函數不等式的幾個特例

1. 升冪函數不等式

令 $\beta=1$, 定理化爲如下。

已知 x、t 是正數, 且 $0<\alpha<1$, 則 $x^{\alpha}\le\alpha t^{\alpha-1}x+(1-\alpha)t^{\alpha}$, 當且僅當 $x=t$ 時等號成立。$(M2)$

2. 降冪函數不等式[2]

令 $\alpha=1$, 定理化爲如下。

已知 x、t 是正數, 且 $\beta>1$, 則 $x^{\beta}\ge\beta t^{\beta-1}x+(1-\beta)t^{\beta}$, 當且僅當 $x=t$ 時等號成立。$(M3)$

3. Bernoulli 不等式[3]

設 $x\ge 1$, 則 $(x+1)^{\alpha}\le\alpha x+1$, $(0<\alpha<1)$; $(x+1)^{\alpha}\ge\alpha x+1$, $(1<\alpha)$,

當且僅當 $x=0$ 時等號成立。$(M4)$

證明：在 $(M2)$ 和 $(M3)$ 中, 令 $t=1$, 用 $x+1$ 代換 x 得 $(M4)$ 正確。因而, Bernoulli 不等式是冪函數不等式的特例。

4. Young 不等式[4]

設 $a,b>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 當 $p,q>1$ 時, 則 $\dfrac{1}{p}a^{p}+\dfrac{1}{q}b^{q}\ge ab$, 等號成立當且僅當 $a^{p}=b^{q}$; 當 $p<1$ 時, $p\ne 0$ 不等號反向。$(M5)$

證明：令 $\alpha=\dfrac{1}{q}>1,\ t=1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ x=\dfrac{b^q}{a^p}$,

則 $(M2)$ 化爲 $\dfrac{b}{a^{p-1}}\geq\dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{b^q}{a^p}+1-\dfrac{1}{q}$, 化簡得 $(M5)$ 正確。代入 $(M3)$ 則不等號反向。

所以, Young 不等式也是冪函數不等式的特例。

三、拓展應用

1. 求非齊次多元函數極值方面的應用

求這類函數的極值, 關鍵在於尋找各項支撐線的支撐點滿足等號同時成立, 且能有效利用已知條件, 或者完全消元。

例1：已知 $x,y,z\in R^+$, 且 $x+y+z=1$, 求 $S=\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{6}}+\sqrt[3]{4y+2}+\sqrt[3]{9z+3}$ 的最大值。

解：由 $(M2)$ 當 $\alpha=\dfrac{1}{3}$ 時, $\sqrt[3]{x}\leq\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}x+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{t}$, 當且僅當 $x=t$ 時等號成立。所以

$$\sqrt[3]{x+\frac{1}{6}}\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x+\frac{1}{6})+\frac{2}{3}\sqrt[3]{a}\,,\tag{1}$$

$$\sqrt[3]{4y+2}\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}(4y+2)+\frac{2}{3}\sqrt[3]{b}\,,$$

$$\sqrt[3]{9z+3}\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}(9z+3)+\frac{2}{3}\sqrt[3]{c}\,,$$

當且僅當 $x+\dfrac{1}{6}=a$, $4y+2=b$, $9z+3=c$ 時, 上述三式等號成立。

令 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{4}{\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{9}{\sqrt[3]{c^2}}$, 得 $b=8a$, $c=27a$。於是

$$\sqrt[3]{4y+2}\leq\frac{y}{3\sqrt[3]{a^2}}+\frac{1}{6\sqrt[3]{a^2}}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{a}\,,\tag{2}$$

$$\sqrt[3]{9z+3}\leq\frac{z}{3\sqrt[3]{a^2}}+\frac{1}{9\sqrt[3]{a^2}}+2\sqrt[3]{a}\,,\tag{3}$$

所以 $x=a-\dfrac{1}{6}$, $y=2a-\dfrac{1}{2}$, $z=3a-\dfrac{1}{3}$, 由 $x+y+z=1$ 得 $a=\dfrac{1}{3}$,

將 (1), (2), (3) 相加得 $S\leq\dfrac{x+y+z}{3\sqrt[3]{a^2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}+4\sqrt[3]{a}$,

即 $S_{\max}=2\sqrt[3]{9}$, 此時 $x=y=\dfrac{1}{6}$, $z=\dfrac{2}{3}$。

例2：求 $f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{2^{10}}}+\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{2^7}}+\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^5}-2x}$ 的最大值。

解：由 $(M2)$ 得

$$f(x)\le \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big(x+\frac{1}{2^{10}}\Big)+\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}\Big(x+\frac{1}{2^7}\Big)+\frac{2}{3}\sqrt[3]{b}+\frac{1}{6\sqrt[6]{c^5}}\Big(\frac{1}{2^5}-2x\Big)+\frac{5}{6}\sqrt[6]{c},$$

當且僅當 $x+\dfrac{1}{2^{10}}=a$, $x+\dfrac{1}{2^7}=b$, $\dfrac{1}{2^5}-2x=c$ 時, 上述不等式取等號,

令 $2\sqrt{a}=3\sqrt[3]{b^2}=6\sqrt[6]{c^5}$ 得 $a=\dfrac{9}{2^{10}}$, $b=\dfrac{1}{2^6}$, $c=\dfrac{1}{2^6}$。

所以 $f(x)\le \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\Big(\dfrac{1}{2^{10}}+\dfrac{1}{2^7}+\dfrac{1}{2^5}\Big)+\dfrac{1}{2}\sqrt{a}+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{b}+\dfrac{5}{6}\sqrt[6]{c}=\dfrac{27}{32}$,

即 $f_{\max}=\dfrac{27}{32}$, 此時 $x=\dfrac{1}{2^7}$。

例3：設目標函數 $F(x,y)=2x+10y-x^2+2xy-3y^2$, 如果 F 有最大值, 則切平面一定爲水平面, 求此時的切點座標。[5]

解：$F(x,y)=2x+10y-(x-y)^2-2y^2$,

由 $(M3)$ 得 $(x-y)^2\ge 2a(x-y)-a^2$, $y^2\ge 2by-b^2$, 所以

$$\begin{aligned}F(x,y)&\le 2x+10y-2a(x-y)+a^2-4by+2b^2\\&=2(1-a)x+(10+2a-4b)y+a^2+2b^2,\end{aligned}$$

此時, 橢圓拋物面區域 $z=F(x,y)$ 均在平面 $\alpha: z=2(1-a)x+(10+2a-4b)y+a^2+2b^2$ 的下方, 並相切於點 P, 當平面 α 爲水平面時, z 取最大值, 如圖 2 所示。

令 $\begin{cases}1-a=0\\10+2a-4b=0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$,

所以 $F_{\max}(x,y)=19$, 此時, $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$。

這樣, 最大值的位置唯一候選點是 $P(4,3)$。

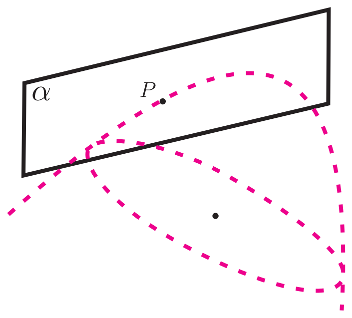

圖2

2. 不等式證明方面的應用

冪函數不等式在證明相關的指數不等式、證明數列的單調性等方面都有著廣泛的應用。

例4：對任意正數 x_i, y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 和有理數 $p,q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,

則 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k\le\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$。(Hölder 不等式)

證明: 在 Young 不等式 $\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\ge ab$ 中, 取

$$a=\frac{x_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}},\qquad b=\frac{y_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}},\quad (k=1,2,\ldots,n),$$

代入上式, 然後對 $k=1,2,\ldots,n$ 求和, 即得 Hölder 不等式。

例5: 證明不等式 $n!<e\Big(\dfrac{n}{2}\Big)^n$, $n\in N^*$。

證明: 由於 $\Big\{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big\}$ 是單調遞增且極限爲 e 的數列, 即 $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n<e$,
所以只要證 $n!\le\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big(\dfrac{n}{2}\Big)^n$,
即 $n!\le\dfrac{1}{2^n}(1+n)^n$ $(*)$ 成立即可。
當 $n=1$ 時 $(*)$ 顯然成立。
假設當 $n=k$ 時 $(*)$ 成立, 即 $k!\le\dfrac{1}{2^k}(1+k)^k$,
所以, $(k+1)!\le\dfrac{1}{2^k}(1+k)^k\cdot(k+1)=\dfrac{1}{2^k}(1+k)^{k+1}$,
下面只需證明 $\dfrac{1}{2^k}(1+k)^{k+1}<\dfrac{1}{2^{k+1}}(2+k)^{k+1}$ 成立, 即當 $n=k+1$ 時 $(*)$ 成立,
上式等價於 $2<\Big(1+\dfrac{1}{1+k}\Big)^{k+1}$, 由 $(M4)$ 得 $\Big(1+\dfrac{1}{1+k}\Big)^{k+1}>1+\dfrac{1}{1+k}\cdot(1+k)=2$,
由數學歸納法知不等式成立。

3. 級數斂散性方面的應用

正項級數收斂性的達朗貝爾 (比值) 判別方法。

設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲正項級數, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 則 (1) 當 $0\le q<1$ 時, 級數收斂; (2) 當 $q>1$ 時, 級數發散。

根據這個判別法, 冪函數不等式在級數收斂性的判別方面都有著很好的應用。

例6: 判別級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+3)^n}$ 的斂散性。[6]

證明: 令 $a_n=\dfrac{n!}{(n+3)^n}$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+4}\cdot\frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n+3}\Big)^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{n}{n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3}{2n^2+11n+12} = \frac{1}{2},$$

故原級數收斂。

例7：設 $m>0$ 是整數, 證明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^m} = \infty$。[7]

證明：設 $f(x) = \dfrac{e^x}{x^m}$, 則

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} e\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^m = e,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty} f(x+1) = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+1}}{(x+1)^m} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{x*x}}{(x+1)^m}, \\ &\geq \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^x}{(x+1)^m} = \lim_{x\to\infty} (1+x)^{x-m} = \infty,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^m} = \infty$。

在應用冪函數不等式時, 適當地選取 t 的值, 可以兼顧平衡係數和等號成立條件的功能。因而, 冪函數不等式為我們解決非輪換對稱不等式問題提供了一個強有力的工具; 在不等式證明中, 起到了放縮的作用. 冪函數不等式溝通了 Bernoulli 不等式、Young 不等式、及 Hölder 不等式, 他們在數學分析、調和分析、泛函分析、偏微分方程等學科的研究中發揮了重要作用, 使用的技巧靈活多樣, 得到的結果極為深刻。

参考文獻

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, GeorgePolya.Inequalities [M]. 北京：人民郵電出版社. 2008年12月第1版：80-86。
2. 王鳳春。用降冪不等式求多元函數的極值[J]。陝西：高等數學研究, 2015(04), 84-86。
3. 席華昌。Bernoulli 不等式及其應用 [J]。陝西：高等數學研究, 2005. 8(4), 42-44。
4. 薛建明, 周旋. Young 不等式及其應用. 貴州大學學報 (自然科學版)[J]. 2016年6月, Vol. 33 No. 3:, 8-9。
5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, George Polya, Inequalities[M], 北京：人民郵電出版社, 2008(12), 第 1 版, 92-94。
6. Adrian Banner, The calculus Lifesaver[M], 北京：人民郵電出版社, 2016(10), 第 2 版, 460-461。
7. 陶哲軒。陶哲軒實分析[M]。北京：人民郵電出版社, 2008(11), 第1版, 327。

—本文作者任教中國上海市寶山區教育學院數學研究室—